

Chapitre 3 : Dynamique du point et de système de points: principe fondamental et théorèmes généraux

On peut envisager la mécanique classique, d'un point de vue formel, comme l'énoncé du principe fondamentale de la dynamique et du théorème du moment cinétique. Il existe cependant une autre manière de voir les choses, strictement équivalente d'un point de vue de la résolution des problèmes, mais procédant d'un autre point de vue, et qui procède de trois lois de conservations:

- la conservation de l'énergie
- la conservation de la quantité de mouvement
- la conservation du moment cinétique.

Nous allons ici définir ces trois grandeurs ainsi que les lois de conservation qui leur sont associées, et nous les illustrerons par quelques-uns des nombreux exemples et applications.

Sommaire

I. Postulats de la Dynamique	2
1. <i>La notion de point matériel</i>	2
2. <i>Quantité de mouvement</i>	3
3. <i>Lois de newton et référentiels galiléens</i>	4
3.1. <i>Premier principe : Principe d'inertie</i>	4
3.2. <i>Deuxième principe : Principe fondamental de la dynamique</i>	4
3.3. <i>Troisième principe : Principe de l'action et de la réaction</i>	5
II. Approche énergétique	6
III. Théorème du moment cinétique	11
1. <i>Moment d'une force</i>	11
2. <i>Moment Cinétique</i>	12
3. <i>Théorème du moment cinétique</i>	13
4. <i>Exemple d'application 2</i>	15
IV. Mouvements à force centrale	16
1. <i>Mouvement général d'un point M soumis à une force centrale conservative</i>	16
a. <i>Moment cinétique</i>	16
b. <i>Énergie mécanique</i>	17
c. <i>Étude des mouvements possibles et conditions d'existence</i>	18
2. <i>Étude des mouvements possibles et conditions d'existence</i>	19
3. <i>Études de trajectoires particulières</i>	20
V. Référentiels non galiléens	23
1. <i>Formule de Bour et lois de composition</i>	23
2. <i>Lois de la physique dans les référentiels non galiléens</i>	25
3. <i>Théorème du moment cinétique en référentiel non galiléen</i>	26
4. <i>Théorème de l'énergie cinétique en référentiel non galiléen</i>	26

I. Postulats de la Dynamique

Isaac Newton (1642-1727) - physicien et mathématicien anglais - fut le théoricien le plus respecté du 17ème siècle. Il publie en 1687 son ouvrage phare « *Naturalis Philosophiae principia mathematica* » dans lequel il jette les bases mathématiques de sa mécanique : il réussit le tour de force d'unifier les lois de la mécanique terrestre (chute des corps) avec les lois de la mécanique céleste. Son traitement du mouvement des planètes en accord avec les lois de Kepler, transformera cette théorie en un véritable pilier de la physique moderne pendant plus de deux siècles, jusqu'à l'arrivée d'un certain Albert Einstein.... Newton repose sa théorie sur trois principes que nous allons détailler. Insistons sur le fait que ces trois principes forment un tout indissociable et cohérent.

1. La notion de point matériel

Un système mécanique sera assimilé à un point matériel si son état (position, mouvement) est complètement décrit à l'aide de trois coordonnées spatiales au maximum. De plus, un point matériel se caractérise par une propriété dynamique : la masse inerte notée $m(\text{kg})$

En d'autre terme :

Un point matériel est un point de l'espace physique auquel on associe une grandeur scalaire positive m , mesurable, appelée masse. Cette grandeur caractérise la quantité de matière que "contient" le point matériel. Il s'agit là d'un modèle.

Au sens mathématique, un point a un volume nul et pourtant on lui associe une quantité de matière : dans ce modèle, un point matériel est une singularité de l'espace.

Par définition, nous appellerons système matériel un ensemble de points matériels. Nous distinguons deux sortes de systèmes matériels :

- **Système matériel indéformable** : tous les points matériels constituant le système restent fixes les uns par rapport aux autres. Ceci correspond à la définition d'un solide en mécanique.
- **Système matériel déformable** : tous les systèmes ne correspondant pas à la définition d'un solide. À titre d'exemple, deux solides, sans liens entre eux, forment un système déformable lorsque chacun des solides se déplace indépendamment de l'autre.

Lorsqu'il ne subit aucune action venant de l'extérieur, un système matériel est dit **isolé** (ou fermé). C'est le cas d'un solide seul dans l'espace, loin de toute autre masse.

Si des actions extérieures agissant sur un système se compensent, alors on dit que le système est **pseudo-isolé**, c'est-à-dire que tout se passe comme s'il était isolé.

Le centre d'inertie d'un système matériel (ou centre de gravitation) correspond au point noté G , barycentre des positions des points matériels affectés de leur masse. Par définition du barycentre, le point G vérifie

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

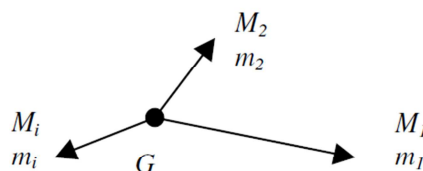


Figure 3.1 • Centre d'inertie d'un système matériel.

Pour un système discret constitué de n masses m_i situées aux points M_i on aura, par rapport à un point O origine :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_i m_i} \Rightarrow m \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$$

avec m = masse totale du système.

Si le système forme un milieu continu à l'échelle macroscopique, le signe somme se transforme en signe intégrale :

$$m \cdot \overrightarrow{OG} = \iiint_M \overrightarrow{OM} dm$$

2. Quantité de mouvement

Définition

Un point matériel M en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$, acquiert une quantité de mouvement (ou impulsion)

$$\vec{p}_M = m \vec{v}_M \quad (2.1)$$

avec m désignant la *masse inerte* du point matériel.

La quantité de mouvement d'un système de points se construit en sommant les contributions de chaque point matériel. Ainsi, la quantité de mouvement d'un système mécanique $\mathcal{S}$ formé de N points matériels de masse m_i s'écrit

$$\vec{p}_S = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{M_i} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt}$$

Si maintenant nous définissons le *centre d'inertie* G comme étant le *barycentre des masses*

inertes :

$$m \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{i=N} m_i \overrightarrow{OM_i} \quad \text{avec} \quad m = \sum m_i$$

il vient alors, par dérivation :

$$m \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt}$$

Ainsi, la quantité de mouvement d'un système de points matériels $\mathcal{S}$, de masse totale m , est la même que celui d'un point matériel de même masse et situé au centre d'inertie G .

$$\vec{p}_S = m \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = m \vec{v}_G \quad \heartsuit \quad (2.2)$$

Le centre d'inertie

La position de G ne dépend pas du choix de O. En effet, si nous considérons un autre point fixe O', la définition de G peut s'écrire

$$m \overrightarrow{OO'} + m \overrightarrow{O'G} = \sum_i m_i \left(\overrightarrow{OO'} + m_i \overrightarrow{O'M_i} \right)$$

c'est-à-dire

$$m \overrightarrow{O'G} = \sum_i m_i \overrightarrow{O'M_i}$$

Par ailleurs, si l'on place O en G on obtient une autre définition de G :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

3. Lois de Newton et référentiels galiléens

3.1. Premier principe : Principe d'inertie

Prenons par exemple une rondelle de hockey sur un plancher de bois horizontal. La rondelle est immobile au départ. Si on ne fait rien, elle restera immobile. Supposons maintenant qu'on la pousse en exerçant une force de courte durée. Elle se mettra en mouvement ; elle va ensuite ralentir graduellement pour s'arrêter.

Il faut une force pour mettre en mouvement un objet.

Si on recommence l'expérience avec la même rondelle, mais sur une patinoire, elle ralentira beaucoup moins rapidement. Dans les deux cas, la force de frottement cinétique exercée par la surface sur la rondelle arrête celle-ci.

Si on suppose une surface dont le frottement est négligeable, alors une fois lancée, la rondelle ne subira aucune force résultante et elle ne ralentira pas. Elle se déplacera en ligne droite avec une vitesse constante. Aucune force n'est nécessaire.

Une force est une action d'un agent sur un objet.

La force est une action, c'est-à-dire une poussée ou une traction. **Une force agit sur un objet**. Une poussée ou une traction agit toujours sur un objet, comme la poussée qui agit sur le ballon. **Une force est produite par un agent**. L'agent est celui qui cause la force et qui est responsable de cette force. Cet agent est toujours un autre objet que celui sur lequel la force agit. Par exemple, la force agissant sur le ballon (l'objet) est produite par le pied (un autre objet) qui est donc l'agent. Chaque force qui s'exerce sur un objet possède toujours un agent. Vous devez toujours être en mesure d'identifier l'agent qui produit la force sur un objet.



On peut maintenant énoncer la première loi de Newton, aussi appelée le principe de l'inertie : Tout objet demeure dans son état de repos ou son état de mouvement rectiligne uniforme, à moins de subir une force résultante non nulle.

- **Un référentiel inertiel est un référentiel pour lequel la première loi de Newton peut être utilisée. C'est un référentiel qui n'est pas accéléré.**
- **La première loi de Newton est utile pour résoudre des problèmes concernant des objets à l'équilibre.**

3.2. Deuxième principe : Principe fondamental de la dynamique

L'énoncé original de la deuxième loi de Newton est le suivant : « Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice ; et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée. »

Le mouvement des corps est provoqué par l'application d'une force extérieure sur l'objet, qui correspond à une grandeur vectorielle F_{ext} ayant une direction, un sens et une intensité traduite par une norme. Cette force, dont l'intensité est exprimée en newton (N), traduit les « efforts » mis en œuvre pour mettre en mouvement l'objet : lorsqu'une action extérieure est exercée sur un corps, le mouvement de ce corps (et donc sa vitesse) est modifiée. Une accélération non nulle apparaît alors sous l'effet de la force.

On peut donc comprendre l'énoncé de la manière suivante : « Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des force extérieures (notée $\sum F_{\text{ext}}$) exercées sur un système ponctuel est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement de ce système par rapport au temps. »

3.3. Troisième principe : Principe de l'action et de la réaction

Cette loi aussi appelée « principe des actions réciproques » ou « loi de l'action et de la réaction ».

L'énoncé original de la troisième loi de Newton est le suivant : « L'action est toujours égale à la réaction, c'est-à-dire que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et de sens contraires. »

II. Approche énergétique

1. Théorème de la puissance cinétique

Le théorème de la puissance cinétique permet de relier la variation instantanée d'énergie cinétique à la puissance. S'il est très utile d'un point de vue conceptuel, il aura au final assez peu d'utilité pratique.

• Travail d'une force

Soit un point matériel M en mouvement à la vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ soumis à une force $\vec{F}$.

Définition. On définit le **travail élémentaire** d'une force δW par

$$\delta W = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(t) dt = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

où $d\vec{\ell}$ est le déplacement infinitésimal de la masse pendant le temps dt . Il s'exprime en Joule.

Définition. On définit le travail W fourni par la force entre les points A et B par

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R}) dt = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}.$$

Le s'exprime en Joule (J).

• Puissance d'une force

En introduisant la définition du travail élémentaire d'une force effectué entre les instant t et $t + dt$, il est possible de définir une puissance instantanée $\mathcal{P}(t)$ par :

$$\mathcal{P}(t) = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Cette grandeur s'exprime dans le système international d'unités en Watts en utilisant le symbole W .

Il est donc clair que le travail élémentaire peut aussi s'exprimer à partir de la puissance de la force et s'écrire

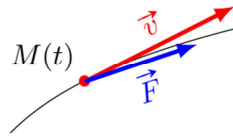
$$dW = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \mathcal{P}(t) dt$$

ce qui conduit à l'expression suivante du travail d'une force

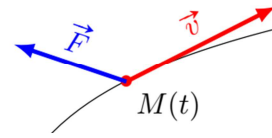
$$W_{1 \rightarrow 2}(\vec{F}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t) dt$$

Définition.

- ▷ Si $\mathcal{P} > 0$, l'énergie cinétique de la particule augmente, la force fournit de l'énergie au système et est qualifiée de **motrice** ou **moteur**.
- ▷ Si $\mathcal{P} < 0$, l'énergie cinétique de la particule diminue, la force prélève de l'énergie au système et est qualifiée de **résistive** ou **résistante**.
- ▷ Si $\mathcal{P} = 0$, l'énergie cinétique de la particule est constante, on dit que la force **ne travaille pas**.



► $\vec{F} \cdot \vec{v} > 0$: la force est motrice.

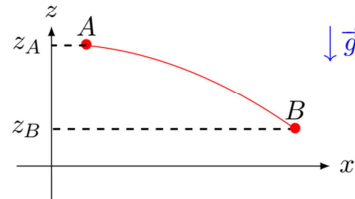


► $\vec{F} \cdot \vec{v} < 0$: la force est résistive.

- Exemple de

► **Travail du poids**

Calculons le travail du poids $\vec{p}$ d'un corps de masse m se déplaçant d'un point A repéré par sa cote z_A à un point B repéré par sa cote z_B .



En coordonnées cartésiennes, on a $d\vec{l} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$. Ainsi, $\delta W = m\vec{g} \cdot d\vec{l} = -mgdz$ soit

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \delta W = -mg \int_{z_A}^{z_B} dz = -mg(z_B - z_A).$$

Attention au signe moins provenant du fait que $\vec{e}_z$ et $\vec{g}$ sont de sens opposés.

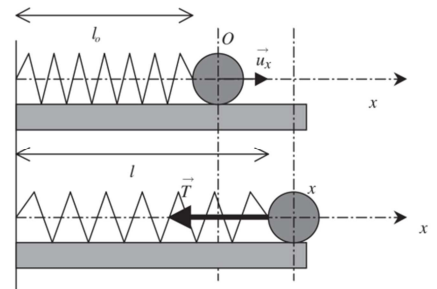
On remarque que si la masse se déplace horizontalement, le travail du poids est nul, cette force ne fournit ou ne prélève alors pas d'énergie.

► **Travail d'une force élastique**

Considérons un ressort de raideur k , de longueur au repos l_0 , au bout duquel est accrochée une masse m . Le ressort et la masse sont sur un plan horizontal et nous nous intéressons uniquement à la tension du ressort. La force élastique $\vec{T}$, c'est-à-dire la force de tension du ressort, est une force qui varie avec l'état d'étirement du ressort k .

Avec les conventions d'orientation des vecteurs, la tension s'exprime de la façon suivante :

$$\vec{T} = -k\Delta l \vec{u}_x = -k(l - l_0) \vec{u}_x = -kx \vec{u}_x$$



Le travail élémentaire de la force élastique $\vec{T}$, lorsque la masse passe d'une position x à une position $x + dx$, est donc donné par :

$$dW_{x \rightarrow x+dx}(\vec{T}) = \vec{T} \cdot d\vec{l} = -kx \vec{u}_x \cdot dx \vec{u}_x = -kx dx = -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

Lorsque le point d'application passe d'une position x_1 à une position x_2 , le travail de la force élastique est donc :

$$W_{x_1 \rightarrow x_2}(\vec{T}) = \int_{x_1}^{x_2} \vec{T} \cdot d\vec{l} = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

Nous remarquons que le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale et finale du ressort. Le travail élémentaire correspond là

aussi à l'opposé de la différentielle d'une fonction qui est $\frac{1}{2}kx^2 + c^{ste}$.

► Travail de la force de Lorentz

Considérons une particule de charge q se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$. La force magnétique subie par la particule est la force de Lorentz donnée par :

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Le travail élémentaire de cette force, au cours d'un déplacement sur sa trajectoire, est donné par :

$$dW = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0$$

Il est toujours nul car le déplacement élémentaire de la particule est toujours perpendiculaire à la force $\vec{F}$. On peut donc conclure que la force de Lorentz ne travaille pas sur sa trajectoire.

2. Théorème de l'énergie cinétique

Considérons un point matériel M de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ et soumis à un ensemble de forces $\vec{f}_k$. La relation fondamentale de la dynamique nous donne

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_k \vec{f}_k$$

Multiplions par $\vec{v}$ cette expression. En remarquant que

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2 \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

il vient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \sum_k \vec{f}_k \cdot \vec{v}$$

Le terme de droite correspond à la somme des puissances mécaniques. Le terme de gauche est la dérivée de la quantité

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Cette quantité qui ne dépend que du point matériel et de son mouvement est appelée *énergie cinétique* et s'exprime en joule. Nous avons donc obtenu une équation d'évolution de l'énergie cinétique :

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{E}_c) = \sum_k \mathcal{P}_k$$

Si nous intégrons cette équation sur le temps entre les instant t_A et t_B , on obtient :

$$\Delta \mathcal{E}_c \equiv \mathcal{E}_c(B) - \mathcal{E}_c(A) = \sum_k W_{A \rightarrow B}^k$$

Enonce du Théorème de l'énergie cinétique (TEC) : Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position A et une position B est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points.

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext})$$

3. Force conservative et énergie potentielle

Une force est conservative si son travail entre deux points ne dépend ni de la trajectoire qui les relie, ni de la façon dont elle est parcourue. Elle admet alors une énergie potentielle.

Exemples : travail du poids, travail de la tension du ressort, travail d'une force constante.

Autre définition : une force est dite conservative lorsqu'elle s'exprime comme le gradient d'une fonction scalaire de l'espace $E_p(x, y, z)$ dite énergie potentielle d'interaction :

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} \mathcal{E}_p(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\partial \mathcal{E}_p / \partial x \\ -\partial \mathcal{E}_p / \partial y \\ -\partial \mathcal{E}_p / \partial z \end{pmatrix}$$

Il y a deux façons d'obtenir l'énergie potentielle associée à une force :

- Soit on cherche la fonction scalaire $E_p(x, y, z)$ qui vérifie $f = -\text{grad} E_p(x, y, z)$ en résolvant trois équations aux dérivées partielles
- Soit on cherche la fonction scalaire $E_p(x, y, z)$ à partir de la relation $dW = \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = -dE_p$

En coordonnées cartésiennes, le travail d'une force conservative le long d'un trajet quelconque C_{AB} s'écrit

$$W_{A \rightarrow B} = - \int_{C_{AB}} \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial z} dz = - \int_{C_{AB}} d\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(B)$$

Autrement dit, une force conservative produit un travail qui ne dépend pas de la forme du trajet mais uniquement de la position des points A et B. En conséquence, si le trajet se referme sur lui-même, le travail est nul.

Les forces de frottement sont nécessairement non conservatives puisqu'elles s'opposent, par nature, au mouvement. En effet,

$$\vec{f} = -\alpha(v)\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{t_1}^{t_2} \alpha(v)v^2 dt < 0$$

En Outre la force conservative aura donc tendance à amener le point matériel dans la zone d'énergie potentielle minimale.

Force	Expression	Statut	Énergie potentielle
Force de gravitation	$\vec{f} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}$	Conservative	$\mathcal{E}_p = -\frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{r} + C^{\text{te}}$
Force électrostatique	$\vec{f} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}$	Conservative	$\mathcal{E}_p = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0 r} + C^{\text{te}}$
Force magnétique	$\vec{f} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$	Ne travaille pas	
Pesanteur uniforme	$\vec{P} = m \vec{g}$	Conservative	$\mathcal{E}_p = mgz + C^{\text{te}}$
Frottements solide/solide	$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$	non conservative	
Frottements fluide/solide	$\vec{f} = -\alpha(v)\vec{v}$	non conservative	
Tension élastique	$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x$	Conservative	$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + C^{\text{te}}$

4. Énergie Mécanique

L'énergie mécanique d'un système est définie comme la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle (qui peut avoir plusieurs sources):

5. Exemple d'application 1 :

Une personne de 70 kg effectue un saut à l'élastique à partir d'une plate-forme située à 54 m au-dessus d'un plan d'eau. Elle attache à ses chevilles un élastique qui a une constante de rappel $k = 100 \text{ N/m}$ et une longueur naturelle de 25 m. L'autre extrémité de l'élastique est fixée à la plate-forme. La résistance de l'air est négligeable. Quelle est la distance entre les pieds de la personne et le cours d'eau lorsque l'élastique est étiré au maximum ?

Résolution :

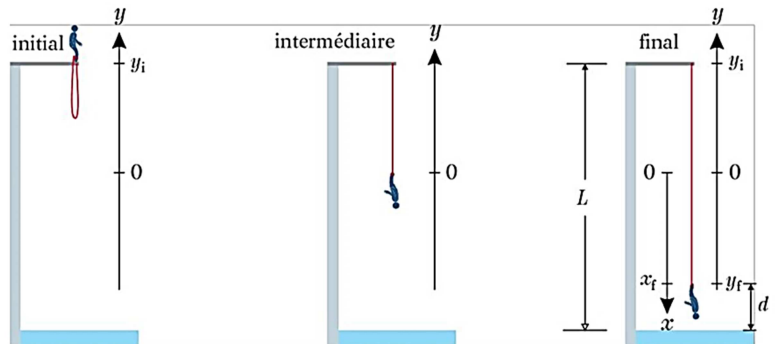
Le système est composé de la personne, de l'élastique et de la Terre.

Il y a deux types d'énergie potentielle : l'énergie potentielle gravitationnelle et l'énergie potentielle élastique.

La personne est immobile au point initial et au point final.

La position initiale y_i correspond à la longueur naturelle de l'élastique.

Nous cherchons la distance d illustrée à l'instant final de la figure ci-contre



$$\frac{1}{2}ky_f^2 + mgy_f - mgy_i = 0$$

$$50,0y_f^2 + 686,7y_f - 17\,168 = 0 .$$

Les deux solutions sont

$$y_f = 12,9 \text{ m} \quad y_f = -26,6 \text{ m} .$$

Nous gardons la solution négative, car le point final est sous le point de référence. La distance entre le cours d'eau et les pieds de la personne est

$$\begin{aligned} d &= L - y_i - |y_f| = 54,0 \text{ m} - 25,0 \text{ m} - 26,6 \text{ m} \\ &= 2,4 \text{ m} . \end{aligned}$$